Zusatz: Partialbruchzerlegung

Hier soll das in der Vorlesung angegebene Verfahren zur Partialbruchzerlegung noch einmal zusammengefasst und um der Fall reell unzerlegbarer Faktoren des Nenners ergänzt werden.

Es geht um die Aufspaltung von gebrochen rationalen Ausdrücken $\dfrac{S(x)}{Q(x)}$ in eine Summe von Partialbrüchen. $S(x)$ und $Q(x)$ sind dabei Polynome.

1 Vorbereitung: Polynomdivision

Mit Polynomdivision wird die gegebene gebrochen rationale Funktion in einen ganzrationalen (=polynomialen) und eine echt gebrochen rationalen Summanden zerlegt.

Ab jetzt wird nur noch der zweite Teil betrachtet.

2 Bestimmung der Nullstellen des Nenners

Hilfsmittel sind hier z.B. Hornerschema, p-q-Formel oder Moivre-Formel.

3 Faktorisierung

Ist a_n der Leitkoeffizient von Q und sind x_1 m_1-fache, x_2 m_2-fache, ..., x_k m_k-fache (reelle oder komplexe) Nullstelle, so ist

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}.$$

Reelle Polynome n-ten Grades haben zwar insgesamt n Nullstellen in $\mathbb{C}$, aber die nichtreellen Nullstellen treten in Paaren auf, die sich zu quadratischen Faktoren zusammenfassen lassen:

Ist Q reelles Polynom und $z = u+iv$ komplexe (nichtreelle) Nullstelle (dann ist auch $\overline{z} = u-iv$ Nullstelle), so ist $(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 - 2ux + (u^2+v^2)$ reell unzerlegbarer quadratischer Faktor. Ist a_n der Leitkoeffizient und sind x_1 m_1-fache, x_2 m_2-fache, ..., x_k m_k-fache reelle Nullstelle, $x^2 + a_1x + b1$ n_1-facher,...,$x^2 + a_lx + b_l$ n_l-facher reell unzerlegbarer quadratischer Faktor, so ist

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_k)^{m_k}(x^2 + a_1x + b_1)^{n_1} \cdots (x^2 + a_lx + b_l)^{n_l}.$$

4 Ansatz für die Partialbruchzerlegung

Es ist natürlich möglich, eine vollständige komplexe Partialbruchzerlegung durchzuführen und bei Bedarf die Partialbrüche zu konjugiert komplexen Nullstellen wieder zusammenzuführen. Rechnerisch ist es aber oft einfacher, eine rein reelle Rechnung durchzuführen.

Der Nenner Q habe die Zerlegung

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_k)^{m_k}(x^2 + a_1x + b_1)^{n_1} \cdots (x^2 + a_lx + b_l)^{n_l}.$$

Dann macht man für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + \cdots \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+a_1x+b_1} + \cdots + \frac{B_{1n_1}x + C_{1n_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}} + \cdots \\ &+ \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2+a_lx+b_l} + \cdots + \frac{B_{ln_l}x + C_{ln_l}}{(x^2+a_lx+b_l)^{n_l}}.\end{aligned}$$

- Eine einfache Nullstelle x_0 gibt einen Summanden mit dem Nenner $x - x_0$,
- eine k-fache Nullstelle x_0 gibt die k Summanden mit den Nennern $x - x_0, \ldots, (x - x_0)^k$,
- ein quadratischer Term $x^2 + ax + b$ gibt einen Summanden mit dem Nenner $x^2 + ax + b$,
- ein k-facher quadratischer Term $(x^2 + ax + b)^k$ gibt die k Summanden mit den Nennern $x^2 + ax + b, \ldots, (x^2 + ax + b)^k$.

Kontrolle: Hat Q den Grad n, so müssen es insgesamt n Unbekannte sein.

5 Bestimmung der Koeffizienten

Erster Schritt ist stets das Aufstellen der Hauptgleichung:

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $\frac{P(x)}{Q(x)}$ wird mit dem Nenner $Q(x)$ durchmultipliziert. Q ist dabei in der faktorisierten Form und die Nenner der einzelnen Summanden kürzen sich heraus.

Danach gibt es zwei wichtige Möglichkeiten:

Kommen in der Zerlegung von Q nicht nur quadratische Faktoren vor, so werden zunächst die Nullstellen von Q eingesetzt. Dabei erhält man direkt die Koeffizienten von Summanden, die von einfachen Nullstellen von Q herkommen und von mehrfachen Nullstellen jeweils die mit dem höchsten Exponenten.

Die restlichen Koeffizienten bestimmt man durch Koeffizientenvergleich:

Die rechte Seite der Hauptgleichung wird ausmultipliziert und nach Potenzen von x zusammengefasst.

Auf linker und rechter Seite werden die Koeffizienten von x^k verglichen. Das ergibt ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten. das man z.B. mit dem Gauß-Algorithmus lösen kann.

Beispiele

$$\boxed{\frac{2x^3-5x^2-26x+15}{x^2-2x-15}}$$

① Da der Zählergrad größer als der Nennergrad ist, wird eine Polynomdivision vorgenommen:

$$\frac{2x^3-5x^2-26x+15}{x^2-2x-15}=2x-1+\frac{2x}{x^2-2x-15}$$

② und③ $x^2-2x-15=(x-+3)(x-5)$

④ Ansatz für den echt gebrochen rationalen Anteil:

$$\frac{2x}{(x+3)(x-5)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-5}$$

⑤ Die Hauptgleichung entsteht durch Multiplikation mit $(x+3)(x-5)$:

$$2x=A(x-5)+B(x+3)$$

Einsetzen von $x=-3$ ergibt $-6=-8A$, also $A=3/4$.
Einsetzen von $x=5$ ergibt $10=8B$, also $B=5/4$.

Damit ist

$$\frac{2x^3-5x^2-26x+15}{x^2-2x-15}=2x-1+\frac{3/4}{x+3}+\frac{5/4}{x-5}$$

$$\boxed{\frac{2x^3+7x+2}{(x^2+4)^2}}$$

Der Nenner hat keine reellen Nullstellen.

④ $\dfrac{2x^3+7x+2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+4)}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$

⑤ Die Hauptgleichung ist

$$2x^3+7x+2=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)=Ax^3+Bx^2+x(4A+C)+(4B+D)$$

Daraus liest man der Reihe nach $A=2$, $B=0$, $C=-1$ und $D=2$ ab. Also ist

$$\frac{2x^3+7x+2}{(x^2+4)^2}=\frac{2x}{x^2+4}+\frac{-x+2}{(x^2+4)^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2-6x+11}{x^3-6x^2+12x-8}}$$

③ Der Nenner hat die Faktorisierung $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$. Daher ist der Ansatz

④ $\dfrac{x^2-6x+11}{(x-2)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}$

⑤ Die Hauptgleichung ist

$$x^2-6x+11=A(x-2)^2+B(x-2)+C.$$

Einsetzen von $x = 2$ ergibt sofort $C = 3$. Der Koeffizientenvergleich für x^2 ergibt $A = 1$ (das ist günstig, da x^2 nur bei A vorkommt). Scließlich ergibt der Vergleich der konstanten Glieder $11 = 4A - 2B + C$, also $11 = 4 - 2B + 3$, $B = -2$. Damit ist

$$\frac{x^2 - 6x + 11}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{3}{(x-2)^2}.$$

$$\boxed{\frac{3x^2+7}{x^3+3x^2+7x}}$$

③ Der Nenner ist $x^3 + 3x^2 + 7x = x(x^2 + 3x + 7)$, und der zweite Faktor hat keine reellen Nullstellen.

④ Daher ist der Ansatz

$$\frac{3x^2+7}{x^3+3x^2+7x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+7}$$

⑤ Die Hauptgleichung ist

$$3x^2 + 7 = A(x^2 + 3x + 7) + (Bx + C)x$$

Einsetzen von $x = 0$ ergibt $A = 1$. B und C werden duch Koefizientenvergleich ermittelt:
Bei x steht $0 = 3A + C$ und damit $C = -3$. Bei x^2 steht $3 = A + B$ und damit $B = 2$. Also ist

$$\frac{3x^2+7}{x^3+3x^2+7x} = \frac{1}{x} + \frac{2x-3}{x^2+3x+7}.$$

$$\boxed{\frac{x^3-x^2+2x-1}{x^4+3x^2+2}}$$

③ Der Nenner ist $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$. Daher ist der Ansatz

④ $$\frac{x^3-x^2+2x-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

⑤ Die Hauptgleichung ist

$$x^3-x^2+2x-1 = (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1) = x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(2A+C)+(2B+D)$$

Man sieht, dass sich das in zwei Gleichungsgruppen aufteilt:

$$\begin{array}{rcrcr} A &+& C &=& 1 \\ 2A &+& C &=& 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcrcr} B &+& D &=& -1 \\ 2B &+& D &=& -1 \end{array}$$

Daraus folgt im ersten Gleichungssystem $A = 1$ und $C = 0$ und im zweiten $B = 0$ und $D = -1$. Daher ist

$$\frac{x^3-x^2+2x-1}{x^4+3x^2+2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+2}.$$